Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра Моделирования Социально - Экономических Систем

Фарвазов Константин Мидарисович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Геополитическая модель сопровождения инвестиционного проекта

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,

доктор физ.-мат. наук,

профессор Малафеев О.А.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение

В условиях современной конкуренции, реализация инвестиционных проектов, связанных с выходом на новые рынки сбыта, ставит перед инвестором множество нетривиальных задач, требующих формализованного подхода к их решению. Одной из таких задач может являться задача размещения деятельности в узлах имеющихся транспортных сетей с учетом различных факторов и особенностей.

В данной работе строится и анализируется модель выбора и сопровождения инвестиционного проекта геополитическими акторами, которые взаимодействуют между собой в некоторой транспортной сети, заданной на плоскости. Рассматриваемый инвестиционный проект заключается в построении торговой сети, состоящей из торговых точек, в которые акторы партиями доставляют товар из пунктов его производства, расположенных в некоторых узлах транспортной сети.

Помимо пунктов производства в некоторых узлах транспортной сети располагаются покупатели, желающие приобретать определенное количество товара. Они имеют возможность закупать товар в любой торговой точке. При этом покупатели стремятся минимизировать свои затраты на приобретение и доставку товара и исходя из этого выбирают торговую точку. Также в некоторых узлах транспортной сети располагаются склады, которые акторы могут арендовать для временного хранения своего товара, так как это значительно снижает издержки на хранение.

Кроме того, в транспортной сети задано множество узлов возможного размещения торговых точек. Каждый актор может разместить свою торговую точку в одном из узлов, принадлежащих этому множеству. При этом актор выбирает пункт производства товара и склад для его хранения таким образом, чтобы его совокупные издержки на закупку, хранение и доставку товара до торговой точки были минимальными.

Акторы желают разместить торговые точки наиболее выгодным для себя образом с точки зрения максимизации дохода от продажи товара.

Таким образом, для успешной реализации инвестиционного проекта акторам необходимо решить задачу размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения торговых точек, при заданном расположении пунктов производства товара, покупателей и складов в соответствии с выбранным принципом оптимальности. В качестве критерия оптимальности выбирается компромиссное решение.

В дипломную работу входит введение, неформальная постановка задачи и её формализация, обзор литературы, две главы, выводы, заключение, список литературы и приложение.

Во введении представлено описание исследуемой модели, определяется задача и описываются объекты исследования.

Обзор литературы содержит информацию о книгах и статьях, использованных при написании данной выпускной квалификационной работы.

В первой главе разобрано решение поставленной задачи, рассмотрены алгоритм нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа Флойда-Уоршелла и алгоритм нахождения компромиссного решения.

В главе 2 приведен численный пример для случая размещения двух торговых точек в транспортной сети из 30 узлов и 50 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, двух складов и четырех покупателей и численный пример для случая размещения трех торговых точек в транспортной сети из 70 узлов и 120 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, трех складов и семи покупателей.

Выводы включают в себя описание полученных результатов.

Заключение посвящено подведению итогов работы. Также в заключении представлен пример возможного использования работы на практике.

В приложении представлена программа на языке C++, реализующая алгоритм нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа Флойда-Уоршелла.

Неформальная постановка задачи размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети в соответствии с принципом компромиссного решения

Рассматривается некоторая транспортная сеть. Все точки этой сети связаны, то есть из любой точки существует путь в любую другую, при этом, возможно, не единственный. В транспортной сети взаимодействуют несколько геополитических акторов. Акторы сообща реализуют инвестиционный проект, который заключается в построении торговой сети, состоящей из торговых точек.

В некоторых узлах транспортной сети располагаются пункты производства, где акторы закупают товар. Также, в некоторых узлах располагаются склады, которые акторы имеют возможность арендовать для временного хранения своего товара, что значительно снижает издержки на хранение. При этом владельцы складов взимают плату за хранение товара в зависимости от его количества на складе.

Товар от пунктов производства до складов доставляется партиями. Также партиями товар доставляется со складов до торговых точек. При этом акторы используют для доставки товара транспорт разной вместимости: от пунктов производства до складов товар доставляется крупными партиями на транспорте повышенной вместимости, а со складов до торговых точек товар развозится более мелкими партиями на транспорте малой вместимости.

Далее, в некоторых узлах транспортной сети располагаются покупатели, каждый из которых желает приобретать определенное количество товара.

Для акторов и для покупателей на множестве рёбер сети заданы функции транспортных издержек, которые обозначают затраты на перемещение по данному ребру. При чём функции транспортных издержек для акторов различаются в зависимости от используемого транспорта: для транспорта повышенной вместимости затраты на перемещение по ребру больше, чем для транспорта малой вместимости.

Совокупные издержки покупателя складываются из стоимости покупки необходимого ему количества товара в торговой точке и собственных суммарных транспортных издержек. Покупатели стремятся минимизировать свои совокупные издержки и исходя из этого выбирают для покупки ту или иную торговую точку.

В транспортной сети также задано множество узлов возможного размещения торговых точек. Каждый актор может разместить свою торговую точку в одном из узлов, принадлежащих этому множеству. При этом актор выбирает пункт производства товара и склад для его хранения таким образом, чтобы его совокупные издержки на закупку, хранение и доставку товара до торговой точки были минимальными.

Акторы желают разместить торговые точки наиболее выгодным для себя образом с точки зрения максимизации получаемого дохода от продажи товара.

Таким образом, для успешной реализации инвестиционного проекта акторам необходимо решить задачу размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения торговых точек, при заданном расположении пунктов производства товара, покупателей и складов в соответствии с принципом компромиссного решения.

Формализация задачи размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети в соответствии с принципом компромиссного решения

Пусть на плоскости задана транспортная сеть (N, k), где N – конечное множество узлов, k – функция пропускной способности сети, сопоставляющая каждому ребру сети (x, y), $x, y \in N$ число $k(x, y) \geq 0$. В данной сети взаимодействуют m геополитических акторов, сообща реализующих инвестиционный проект, который заключается в построении торговой сети, состоящей из m торговых точек.

В узлах, составляющих множество $P = (p_1, \dots, p_s)$, располагаются s покупателей. Каждый покупатель желает приобретать определенное количество товара. Количества единиц товара, которые желают приобретать покупатели составляют набор чисел $V = (v_1, \dots, v_s)$.

Для каждого ребра сети (x, y) определенно значение функций транспортных издержек для перемещения по данному ребру акторов: $\overline{C_a^1}(x, y) \geq 0$ для транспорта повышенной вместимости и $\overline{C_a^2}(x, y) \geq 0$ для транспорта малой вместимости, $\overline{C_a^1}(x, y) \geq \overline{C_a^2}(x, y)\ \forall (x, y)$; а также значение функции транспортных издержек $\overline{C_b}(x, y) \geq 0$ для перемещения по данному ребру покупателей.

В некоторых узлах сети, составляющих множество $D = (d_1, \dots, d_h)$, располагаются h пунктов производства, где акторы закупают товар. Стоимости единицы товара для акторов в различных пунктах производства составляют набор чисел $L = (l_1, \dots, l_h)$.

Также в некоторых узлах сети, составляющих множество $K = (k_1, \dots, k_r)$, располагаются r складов, где акторы имеют возможность хранить товар. Владельцы складов взимают плату за хранение товара в зависимости от его количества на складе. Стоимости хранения единицы товара для акторов на различных складах составляют набор чисел $S =$

$(s_1, \dots, s_r)$. Товар от пунктов производства до складов доставляется фиксированными партиями в Q^1 штук на транспорте повышенной вместимости.

Далее, в некоторых свободных узлах транспортной сети, составляющих множество узлов $G = (g_1, \dots, g_c)$ возможного размещения торговых точек, $c \geq m$, акторы имеют возможность разместить свои торговые точки. Таким образом в узлах транспортной сети из множества G могут располагаться m торговых точек, составляющих множество $T = (t_1, \dots, t_m)$, $T \in G$, в каждую из которых фиксированными партиями в Q^2 штук на транспорте малой вместимости доставляется товар со складов.

Актор выбирает пункт производства товара и склад для его хранения таким образом, чтобы его совокупные издержки на закупку, хранение и доставку товара до торговой точки были минимальными.

Стоимость единицы товара P_i в торговой точке i, $i = \overline{1,m}$ для покупателей равна сумме его стоимости в пункте производства, где его берет актор, удельных складских издержек, удельных транспортных издержек при доставке его от пункта производства до склада и от склада до торговой точки, и наценки актора:

$$P_i = l_i + s_i + \frac{C_i^1}{Q^1} + \frac{C_i^2}{Q^2} + w_i$$

где: l_i - стоимость единицы товара для актора в пункте производства; s_i - арендная плата за хранение единицы товара на складе; C_i^1 - транспортные издержки актора на пути от пункта производства до склада; C_i^2 - транспортные издержки актора на пути от склада до торговой точки; w_i - наценка актора на товар.

Совокупные издержки U_j покупателя j, $j = \overline{1,s}$ складываются из стоимости покупки необходимого ему количества товара в торговой точке i, $i = \overline{1,m}$ и собственных суммарных транспортных издержек на пути от места расположения покупателя до этой торговой точки:

$$U_j = v_j P_i + C_i^3$$

где: v_j - количество единиц товара, которое желает приобретать покупатель j; P_i - сстоимость единицы товара в торговой точке i; C_i^3 - транспортные издержки покупателя на пути от места его расположения до торговой точки i.

При этом каждый покупатель j стремится минимизировать свои совокупные издержки, то есть найти $min_i(v_j P_i + C_i^3)$, и исходя из этого выбирает для покупки ту или иную торговую точку.

Каждый актор желает разместить свою торговую точку наиболее выгодным для себя образом с точки зрения максимизации дохода от продажи товара. Поэтому для успешной реализации инвестиционного проекта, акторам необходимо решить задачу размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети, принадлежащих множеству узлов возможного размещения торговых точек, при заданном расположении пунктов производства товара, покупателей и складов в соответствии с принципом компромиссного решения.

Обзор литературы

При исследовании поставленной задачи использовалась научная литература отечественных и зарубежных авторов.

Начальная информация по теории игр и её приложениях представлена в книге [1]. В книге [2] представлена информация о потоках в сетях, а также описаны алгоритмы нахождения многокритериальных решений при различных принципах оптимальности. Задачи из области теории матричных игр и линейного программирования, а также статические и динамические модели производства рассмотрены в книге [3]. Основная информация по теории графов, описание задачи о кратчайших путях и алгоритмы её решения представлены в книге [4]. В статье [5] описана теоретико-игровая модель линейного города Хоттелинга, широко применяющаяся для анализа пространственной конкуренции. Информация, раскрывающая основы экономической теории, представлена в книге [6].

Глава 1. Решение задачи размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети в соответствии с принципом компромиссного решения

Можно разделить решение задачи на несколько этапов:

1. Нахождение путей с минимальными транспортными издержками для акторов от пунктов производства товара до складов и от складов до возможных мест расположения торговых точек, а также путей с минимальными транспортными издержками для покупателей от мест их расположения до торговых точек.
2. Построение матрицы доходов торговых точек в зависимости от их расположения.
3. Нахождение компромиссного решения.

1.1. Нахождение путей с минимальными транспортными издержками между парами узлов

Рассмотрим некоторую транспортную сеть, на каждом ребре которой задана функция транспортных издержек. Для решения поставленной задачи нам необходимо найти такие пути между некоторыми узлами сети, на которых транспортные издержки будут минимальными. Для этого существует несколько способов. Один из самых очевидных - это применение n раз алгоритма Дейкстры для нужных узлов сети. Однако в случае полного графа с неотрицательной матрицей весов $C = \{c_{ij}\}, c_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}$ время вычислений пропорционально n^3, а при произвольной матрице весов - n^4. Следовательно, при решении задач большой размерности последовательное применение алгоритма Дейкстры нецелесообразно. Исходя из этого, как наиболее подходящий для данной задачи, был выбран алгоритм для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа Флойда — Уоршелла, который последовательно преобразует матрицу весов C и за n итераций дает матрицу путей с минимальными транспортными издержками. Вычислительная сложность равна n^3 для произвольной матрицы весов.

1.2. Алгоритм нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного графа Флойда — Уоршелла

Пусть имеется непустой взвешенный граф $G = (V, E)$ с произвольными весами ребер. Необходимо найти кратчайшие пути между всеми парами вершин графа. При этом полагаем, что циклы отрицательной суммарной длины в графе отсутствуют.

Построим матрицу D^0 размерности $V \times V$, элементы которой определяются по правилу:

$$\begin{cases} d_{ii}^0 = 0 \\ d_{ij}^0 = weight(v_i, v_j), \quad i \neq j, \quad \text{если в графе } \exists \text{ ребро } (v_i, v_j) \\ d_{ij}^0 = \infty, \quad i \neq j, \quad \text{если в графе } \nexists \text{ ребро } (v_i, v_j) \end{cases}$$

Далее, положим $m \coloneqq 0$ и будем строить матрицу D^{m+1} по D^m, вычисляя её элементы следующим образом:

$$\begin{cases} d_{ii}^{m+1} = 0 \\ d_{ij}^{m+1} = min\{d_{ij}^m, d_{i,m+1}^m + d_{m+1,j}^m\}, \ i \neq j \end{cases} \qquad (1)$$

При этом если $d_{im}^m + d_{mi}^m < 0$ для какого-либо i, то в графе существует цикл отрицательной длины, проходящий через вершину v_i.

Далее, положим $m \coloneqq m + 1$. До тех пор пока $m < V$, повторяем шаг (1). В итоге, при $m = V$ будет построена матрица D^V, элементы которой равны длинам кратчайших путей между соответствующими вершинами.

Одной из реализаций алгоритма Флойда — Уоршелла является программа на языке C++, рассмотренная приложении.

1.3. Алгоритм нахождения компромиссного решения

Для нахождения компромиссного решения в задаче размещения торговых точек нам необходимо знать функции выигрыша каждого актора. В рассматриваемой задаче функцией выигрыша будет общая стоимость товара, который покупают у актора в торговой точке.

Пусть у нас построена матрица доходов торговых точек в зависимости от их расположения. Она является матрицей выигрышей Г, в строках которой стоят торговые точки, а в столбцах - возможные ситуации в игре:

$$\Gamma = (\alpha_{m,q})$$

где: m - количество торговых точек; q - количество ситуаций в игре.

Построим идеальный вектор, который состоит из максимальных значений доходов торговых точек:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_m \end{pmatrix}, \qquad \text{где } M_i = \max_q(\alpha_{m,q}), i = \overline{1,m}$$

Далее, составим матрицу невязок. Для этого вычислим величины отклонений доходов от максимального дохода для каждой торговой точки:

$$\Gamma_M = \left(M - \alpha_{m,q}\right) = (\beta_{m,q})$$

Теперь упорядочим в матрице невязок в каждой ситуации значения по возрастанию таким образом, чтобы в первой строке были наименьшие невязки, а в последней - наибольшие. Таким образом последняя строка будет содержать максимальные невязки $max_m(\beta_{m,q})$.

Наконец, среди найденных максимальных невязок выбираем минимальное значение $\min_q \max_m(\beta_{m,q})$.

Ситуация, полученная таким образом, будет являться компромиссным решением.

Если в последней строке несколько минимальных значений, то следует искать минимум на строке выше, и так далее. В этом случае ситуаций, являющихся компромиссным решением, несколько.

Глава 2. Примеры

2.1. Размещение двух торговых точек в транспортной сети из 30 узлов и 50 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, двух складов и четырех покупателей

Рассматривается транспортная сеть N, изображенная на рисунке 1, которая содержит 30 узлов $x_0, \dots, x_{29}$ и 50 ребер. На каждом ребре заданы значения функций транспортных издержек для акторов (отдельно для транспорта повышенной вместимости и для транспорта малой вместимости) и для покупателей. В транспортной сети взаимодействуют 2 геополитических актора, каждый из которых желает разместить в ней свою торговую точку.

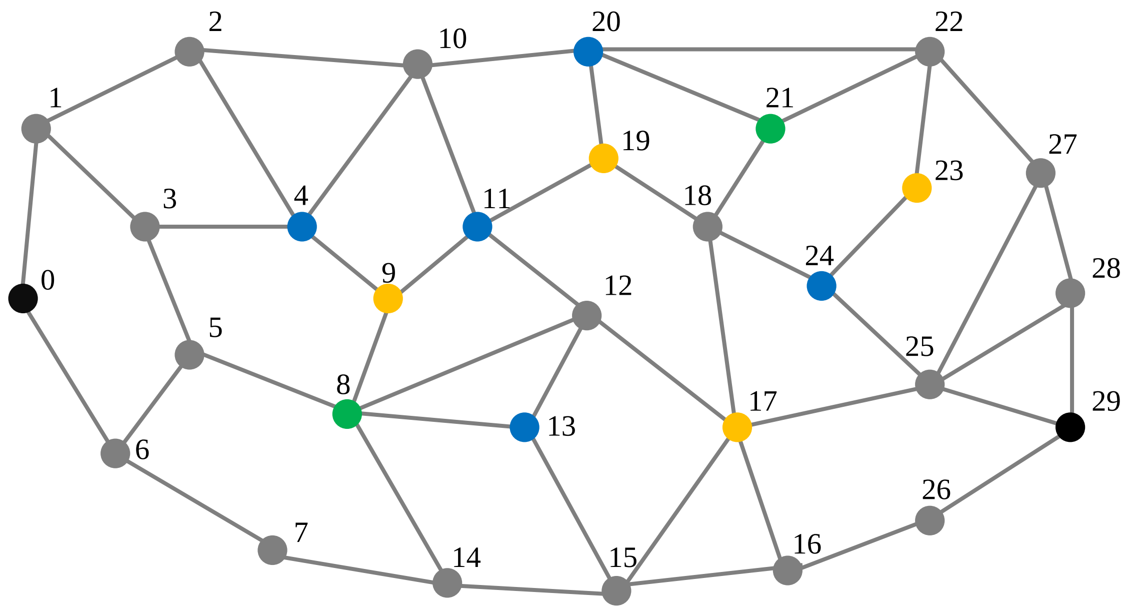

Рис.1

В узлах x_0 и x_{29} располагаются пункты производства, где акторы берут товар (выделены чёрным цветом). Стоимость единицы товара в этих пунктах производства составляет $l_1 = 4$ и $l_2 = 2$ соответственно.

В узлах x_4, x_{13}, x_{20}, x_{24} находятся покупатели, желающие приобретать товар (выделены синим цветом). Каждый покупатель желает приобретать по 5 единиц товара, то есть $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 5$.

Далее, в узлах x_8 и x_{21} расположены склады, где акторы могут хранить товар (выделены зеленым цветом). Плата за хранение единицы товара на этих складах составляет $s_1 = 1{,}5$ и $s_2 = 1$ соответственно. Акторы доставляют товар из пунктов производства до складов партиями в $Q^1 = 10$.

Также в сети заданы четыре узла x_9, x_{17}, x_{19} и x_{23}, где акторы имеют возможность разместить свои торговые точки (выделены оранжевым цветом). Со складов до торговых точек товар доставляется партиями в $Q^2 = 5$.

Наценка на единицу товара в торговых точках составляет 50% от суммы издержек актора на покупку, хранение на складе и перевозку единицы товара вдоль пути от пункта производства до склада и от склада до торговой точки:

$$w_i = \frac{1}{2}\left(l_i + \frac{C_i^1}{Q^1} + \frac{C_i^2}{Q^2} + s_i \right)$$

Транспортные издержки актора при перевозке товара на транспорте повышенной вместимости $\overline{C_a^1}(x,y)$ и при перевозке товара на транспорте малой вместимости $\overline{C_a^2}(x,y)$, а также покупателей $\overline{C_b}(x,y)$ на каждом ребре представлены в таблице 1:

(x,y)	$\overline{C_a^1}(x,y)$	$\overline{C_a^2}(x,y)$	$\overline{C_b}(x,y)$
(0,6)	6	4	7
(5,6)	12	8	10
(0,1)	3	2	8
(1,3)	10	9	5
(1,2)	13	6	13
(3,4)	19	12	7
(3,5)	11	7	8
(5,8)	6	2	2
(6,7)	21	16	7
(7,14)	10	6	9
(8,14)	19	15	9
(8,13)	16	9	5

(8,9)	10	7	13
(4,9)	9	5	9
(4,10)	17	13	5
(2,4)	14	12	14
(2,10)	15	11	9
(10,11)	6	5	7
(11,19)	12	7	3
(10,20)	15	10	11
(19,20)	16	12	5
(20,21)	10	6	8
(20,22)	23	14	15
(21,22)	12	10	14
(18,21)	8	6	6
(18,19)	9	5	2
(11,12)	24	13	9
(9,11)	15	10	3
(8,12)	13	8	8
(12,13)	13	7	8
(12,17)	17	10	14
(17,18)	5	4	5
(18,24)	12	10	2
(23,24)	19	10	13
(22,23)	16	11	8
(22,27)	9	6	9
(27,28)	21	15	14
(25,27)	6	3	7
(24,25)	16	13	11
(17,25)	7	5	9
(13,15)	12	6	3
(15,17)	14	8	6
(14,15)	15	10	6
(15,16)	9	5	9
(16,17)	20	15	4
(16,26)	14	11	14

(26,29)	19	17	9
(25,29)	9	7	3
(25,28)	14	8	4
(28,29)	16	13	10

Таблица 1

Вначале найдем пути с минимальными транспортными издержками для акторов от пунктов производства товара до складов. Так как при этом используется транспорт повышенной вместимости, то матрица D_1^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_a^1}(x,y)$. Применив к ней алгоритм Флойда — Уоршелла, получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для актора при использовании транспорта повышенной вместимости.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от пунктов производства товара до складов:

	x_8	x_{21}
x_0	24	56
x_{29}	46	29

Таблица 2

Так как размер партии $\mathrm{Q}^1 = 10$, то минимальные удельные транспортные издержки на пути от пунктов производства товара до складов:

	x_8	x_{21}
x_0	2,4	5,6
x_{29}	4,6	2,9

Таблица 3

Далее, найдем пути с минимальными транспортными издержками для акторов от складов до узлов возможного размещения торговых точек. В этом случае товар доставляется на транспорте малой вместимости, а матрица D_2^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_a^2}(x,y)$. Вновь воспользуемся алгоритмом Флойда — Уоршелла и получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для актора при использовании транспорта малой вместимости.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от складов до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
x_8	7	18	24	42
x_{21}	28	10	11	21

Таблица 4

И так как размер партии $Q^2 = 5$, то минимальные удельные транспортные издержки на пути от складов до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
x_8	1,4	3,6	4,8	8,4
x_{21}	5,6	2	2,2	4,2

Таблица 5

Итого, суммарные удельные транспортные издержки актора при доставке единицы товара до узлов возможного размещения торговых точек в зависимости от выбора пункта производства и склада, составляют:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
$x_0 \to x_8$	3,8	6	7,2	10,8
$x_0 \to x_{21}$	7	9,2	10,4	14
$x_{29} \to x_8$	6	8,2	9,4	13
$x_{29} \to x_{21}$	8,5	4,9	5,1	7,1

Таблица 6

С учетом стоимости единицы товара в пунктах производства: $l_1 = 4$ в пункте производства x_0 и $l_2 = 2$ в пункте производства x_{29}; суммарных удельных транспортных издержек; удельных складских издержек: $s_1 = 1{,}5$ на складе x_8 и $s_2 = 1$ на складе x_{21}; а также наценки актора 50%, получаем стоимость единицы товара во всех узлах возможного размещения торговых точек для покупателей в зависимости от выбора актором пункта производства и склада:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
$x_0 \to x_8$	13,95	17,25	19,05	24,45
$x_0 \to x_{21}$	18	21,3	23,1	28,5
$x_{29} \to x_8$	14,25	17,55	19,35	24,75
$x_{29} \to x_{21}$	17,25	11,85	12,15	15,15

Таблица 7

Учитывая, что актор выбирает пункт производства товара и склад для его хранения таким образом, чтобы его совокупные издержки на закупку, хранение и доставку товара до торговой точки были минимальными, можем найти окончательную стоимость единицы товара во всех узлах возможного расположения торговых точек для покупателей:

x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
13,95	11,85	12,15	15,15

Таблица 8

Теперь, учитывая что покупатели желают приобретать по $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 5$ единиц товара, можем вычислить для каждого покупателя стоимость покупки необходимого ему количества товара в зависимости от выбора возможной торговой точки:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
x_4	69,75	59,25	60,75	75,75
x_{13}	69,75	59,25	60,75	75,75
x_{20}	69,75	59,25	60,75	75,75
x_{24}	69,75	59,25	60,75	75,75

Таблица 9

Далее, нам необходимо найти пути с минимальными издержками из узлов расположения всех покупателей во все узлы возможного размещения торговых точек. Матрица D_3^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_b}(x, y)$. После применения к ней алгоритма Флойда — Уоршелла получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для покупателей.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от узлов расположения покупателей до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
x_4	9	22	15	32
x_{13}	18	9	16	29
x_{20}	11	12	5	22
x_{24}	10	7	4	13

Таблица 10

Суммируя для каждого покупателя транспортные издержки до узлов возможного размещения торговых точек и стоимость покупки необходимого ему количества товара в зависимости от выбора возможной торговой точки, найдем совокупные издержки покупателя в зависимости от выбора возможной торговой точки:

	x_9	x_{17}	x_{19}	x_{23}
x_4	78,75	81,25	75,75	107,75
x_{13}	87,75	68,25	76,75	104,75
x_{20}	80,75	71,25	65,75	97,75
x_{24}	79,75	66,25	64,75	88,75

Таблица 11

Теперь, учитывая, что каждый покупатель выбирает торговую точку, где его совокупные издержки будут минимальными, можем построить матрицу доходов торговых точек в зависимости от их расположения. Всего возможно 6 ситуаций:

	(9,17)	(9,19)	(9,23)	(17,19)	(17,23)	(19,23)
1	69,75	0	279	59,25	237	243
2	177,75	243	0	182,25	0	0

Таблица 12

Данная матрица является матрицей выигрышей Г, в строках которой стоят торговые точки, а в столбцах - возможные ситуации в игре:

$$\Gamma = (\alpha_{m,q}); \; m = 1,2; \; q = 1, \dots, 6$$

Идеальный вектор М будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\limits_q \alpha_{1,q} \\ \max\limits_q \alpha_{2,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 279 \\ 243 \end{pmatrix}$$

В свою очередь матрица невязок $\Gamma_M = (\beta_{m,q}) = (M - \alpha_{m,q})$ будет иметь вид:

	(9,17)	(9,19)	(9,23)	(17,19)	(17,23)	(19,23)
1	209,25	279	0	219,75	42	36
2	65,25	0	243	60,75	243	243

Таблица 13

Теперь упорядочим в матрице невязок в каждой ситуации значения по возрастанию таким образом, чтобы в первой строке были наименьшие невязки, а в последней - наибольшие. Получим:

	(9,17)	(9,19)	(9,23)	(17,19)	(17,23)	(19,23)
1	65,25	0	0	60,75	42	36
2	209,25	279	243	219,75	243	243

Таблица 14

Наконец, в последней строке, содержащей максимальные невязки $\max_m(\beta_{m,q})$, выберем минимальное значение:

$$\min_q \max_m (\beta_{m,q}) = 209,25$$

Полученному значению соответствует ситуация (9,17), которая и является компромиссным решением. Таким образом, торговые точки согласно принципу компромиссного решения необходимо разместить в узлах x_9 и x_{17}. При этом доход акторов составит: (69,75; 177,75).

2.2. Размещение трёх торговых точек в транспортной сети из 70 узлов и 120 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, трёх складов и семи покупателей

Рассматривается транспортная сеть N, изображенная на рисунке 2, которая содержит 70 узлов $x_0, \ldots, x_{69}$ и 120 ребер. На каждом ребре заданы значения функций транспортных издержек для акторов (отдельно для транспорта повышенной вместимости и для транспорта малой вместимости) и для покупателей. В транспортной сети взаимодействуют 3 геополитических актора, каждый из которых желает разместить в ней свою торговую точку.

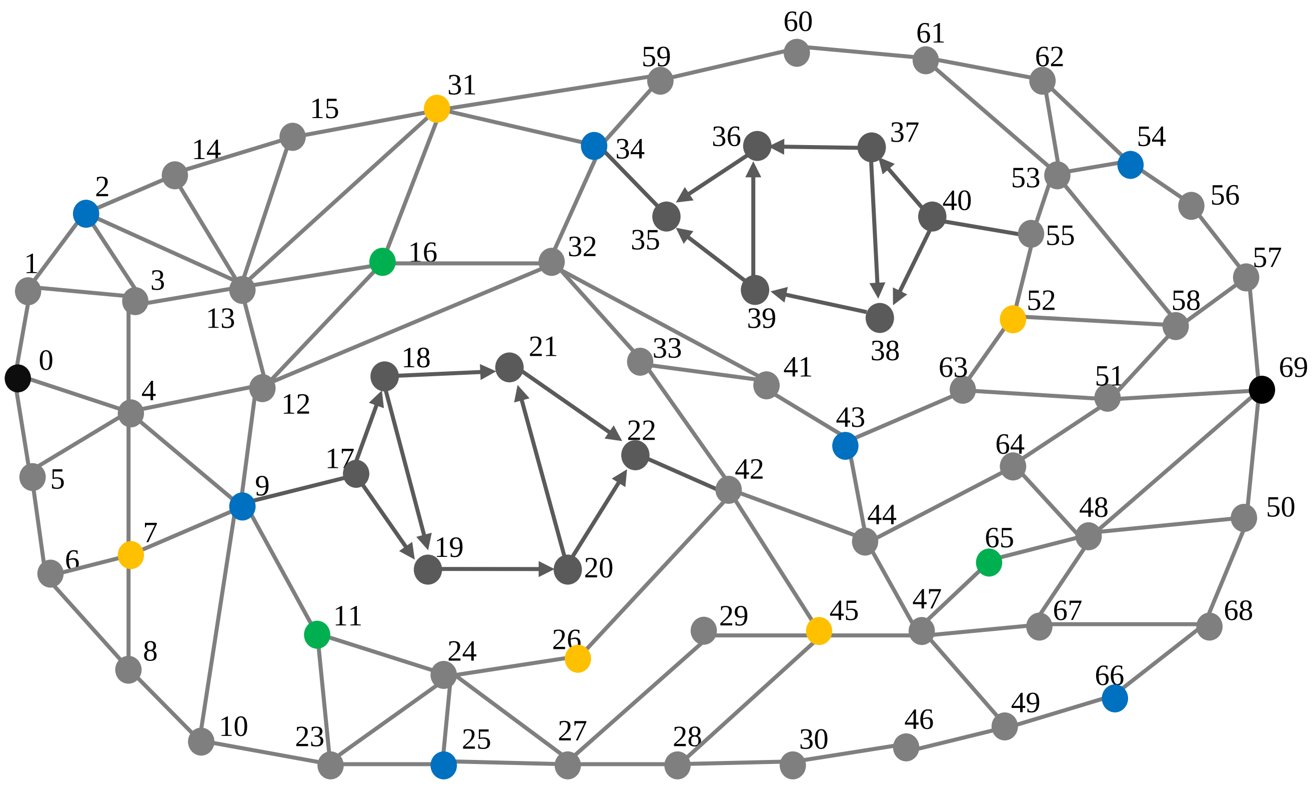

Рис.2

В узлах x_0 и x_{69} располагаются пункты производства, где акторы берут товар (выделены чёрным цветом). Стоимость единицы товара в этих пунктах производства составляет $l_1 = 3$ и $l_2 = 4{,}5$ соответственно.

В узлах x_2, x_9, x_{25}, x_{34}, x_{43}, x_{54}, x_{66} находятся покупатели, желающие приобретать товар (выделены синим цветом). Количества единиц товара, которые желают приобретать покупатели составляют соответственно: $v_1 = 10, v_2 = 7, v_3 = 8, v_4 = 12, v_5 = 7, v_6 = 10, v_7 = 8$.

Далее, в узлах x_{11}, x_{16} и x_{65} расположены склады, где акторы могут хранить товар (выделены зеленым цветом). Плата за хранение единицы товара на этих складах составляет $s_1 = 3$, $s_2 = 2{,}5$ и $s_3 = 2$ соответственно. Акторы доставляют товар от пунктов производства до складов партиями в $Q^1 = 15$.

Также в сети выделено пять узлов x_7, x_{26}, x_{31}, x_{45} и x_{52}, где акторы имеют возможность разместить свои торговые точки (выделены оранжевым цветом). Со складов до торговых точек товар доставляется партиями в $Q^2 = 10$.

Наценка на единицу товара в торговых точках составляет 100% от суммы издержек актора на покупку, хранение на складе и перевозку единицы товара вдоль пути от пункта производства до склада и от склада до торговой точки:

$$w_i = l_i + \frac{C_i^1}{Q^1} + \frac{C_i^2}{Q^2} + s_i$$

Участки сети (9,42) и (35,55), каждый из которых состоит из десяти ребер, закрыты для передвижения по ним покупателей. В свою очередь акторы имеют возможность провозить свой товар по этим участкам на специальном грузовом транспорте, который следует по определенным маршрутам. При этом акторы могут разделить партию своего товара любым образом и отправить её частями по разным маршрутам.

Акторы обязаны оплатить 20% от совокупных транспортных издержек специального грузового транспорта, которые в свою очередь зависят от количества товара n, перевозимого по ребрам и составляют: $10n$ для ребер (17,18), (21,22), (37,40) и (35,36); $n + 100$ для ребер (17,19) и (20,22); $n + 20$ для ребер (18,19) и (20,21); $10n + 90$ для ребра (18,21); $n + 70$ для ребра (19,20); $n + 110$ для ребер (38,40) и (35,39); $n + 15$ для ребер (37,38) и (36,39); $10n + 95$ для ребра (36,37); $n + 75$ для ребра (38,39).

Транспортные издержки акторов при перевозке товара на транспорте повышенной вместимости $\overline{C_a^1}(x,y)$ и при перевозке на транспорте малой вместимости $\overline{C_a^2}(x,y)$, а также покупателей $\overline{C_b}(x,y)$ на остальных ребрах представлены в таблице 15:

(x,y)	$\overline{C_a^1}(x,y)$	$\overline{C_a^2}(x,y)$	$\overline{C_b}(x,y)$
(0,1)	12	10	9
(1,2)	13	8	7
(0,4)	9	6	6
(0,5)	14	7	10
(1,3)	11	10	7
(2,3)	9	4	7
(3,4)	11	8	5
(4,5)	15	12	10
(5,6)	9	5	4
(6,7)	12	6	5
(4,7)	13	10	9
(6,8)	10	7	7
(7,8)	17	9	10
(7,9)	15	13	11
(8,9)	11	8	6
(9,10)	10	4	8
(4,9)	13	7	5
(4,12)	11	9	9
(9,12)	15	9	6
(12,13)	12	10	8
(3,13)	14	7	7
(2,13)	10	5	6
(13,14)	11	9	10
(2,14)	18	12	7
(14,15)	17	13	11
(13,15)	13	10	9
(13,16)	15	7	11
(13,31)	14	11	10

(15,31)	9	6	7
(12,16)	10	8	8
(16,31)	7	4	5
(12,32)	15	11	12
(16,32)	13	9	6
(32,33)	14	11	11
(33,42)	13	8	6
(9,11)	13	11	10
(10,23)	15	8	11
(11,24)	18	14	13
(11,23)	17	10	9
(23,24)	16	7	7
(24,26)	13	9	10
(24,27)	11	5	7
(23,25)	13	9	5
(24,25)	17	10	9
(25,27)	9	6	4
(27,29)	10	9	5
(26,42)	13	10	8
(29,45)	18	13	10
(27,28)	10	6	12
(42,45)	13	11	10
(28,45)	18	12	11
(28,30)	14	10	8
(30,46)	10	7	9
(46,49)	11	9	8
(44,47)	12	10	6
(47,49)	14	7	10
(42,44)	16	10	12
(43,44)	18	14	7
(41,43)	11	5	7
(32,41)	7	3	3
(33,41)	12	11	8
(31,34)	9	5	8

(32,34)	8	6	6
(43,63)	12	9	5
(43,64)	14	6	8
(47,65)	16	5	8
(48,64)	13	10	7
(48,65)	18	10	11
(47,67)	9	7	7
(49,66)	6	4	5
(66,68)	13	11	10
(67,68)	5	3	4
(47,50)	13	10	6
(48,67)	17	9	12
(50,68)	13	11	12
(48,69)	9	4	6
(50,69)	14	7	11
(51,63)	16	12	11
(51,64)	10	9	9
(52,63)	15	11	7
(52,58)	12	7	9
(52,55)	7	5	6
(53,55)	9	6	5
(53,54)	16	12	10
(54,56)	15	10	12
(51,69)	11	6	7
(53,58)	12	8	6
(57,69)	9	5	10
(57,58)	12	5	4
(56,57)	11	10	8
(59,60)	14	9	7
(60,61)	13	8	6
(61,62)	8	6	9
(53,61)	11	5	3
(53,62)	13	10	11
(54,62)	15	10	9

(51,58)	9	6	6
(45,47)	12	8	9
(31,59)	14	10	7
(34,59)	11	7	5

Таблица 15

Рассмотрим участок сети (9,42), представленный на рисунке 3:

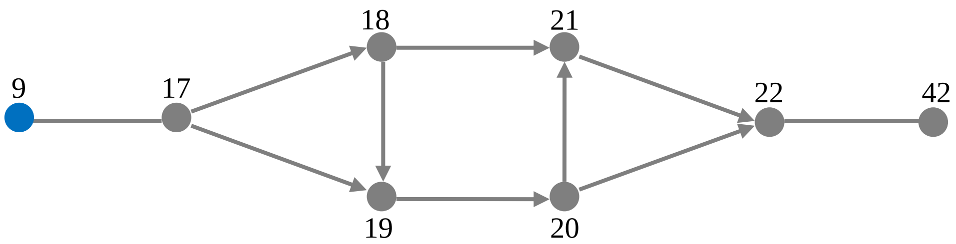

Рис.3

Пусть специальный грузовой транспорт на данном участке курсирует по 4 маршрутам, представленным в таблице 16:

Маршрут	Ребра, входящие в маршрут
№1	(17,18) → (18,21) → (21,22)
№2	(17,18) → (18,19) → (19,20) → (20,21) → (21,22)
№3	(17,19) → (19,20) → (20,21) → (21,22)
№4	(17,19) → (19,20) → (20,22)

Таблица 16

Транспортные издержки специального грузового транспорта на каждом ребре маршрута зависят от количества товара, перевозимого по данному ребру.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – количество товара, провозимое по маршруту с соответствующим индексом. Тогда издержки, затраченные на прохождение каждого маршрута можно записать следующим образом:

Для пути №1:

$$10(e_1 + e_2) + 10e_1 + 90 + 10(e_1 + e_2 + e_3)$$

Для пути №2:

$$10(e_1+e_2)+e_2+20+(e_2+e_3+e_4)+70+(e_2+e_3)+20+10(e_1+e_2+e_3)$$

Для пути №3:

$$(e_3+e_4)+100+(e_2+e_3+e_4)+70+(e_2+e_3)+20+10(e_1+e_2+e_3)$$

Для пути №4:

$$(e_3+e_4)+100+(e_2+e_3+e_4)+70+e_4+100$$

Упростив, получим, соответственно:

$$30e_1+20e_2+10e_3+90$$

$$20e_1+23e_2+12e_3+e_4+110$$

$$10e_1+12e_2+13e_3+2_4+190$$

$$e_2+2e_3+3e_4+270$$

Найдем равновесие по Нэшу. Для этого необходимо, чтобы все полученные значения были равны. Приравняв с первым значением все остальные, получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 10e_1-3e_2-2e_3-e_4=20 \\ 20e_1+8e_2-3e_3-2e_4=100 \\ 30e_1+19e_2+8e_3-3e_4=180 \end{cases}$$

Далее, учитывая, что размер партии при доставке товара от пунктов производства до складов на транспорте повышенной вместимости $Q^1=15$ штук, а размер партии при доставке товара от складов до торговых точек на транспорте малой вместимости $Q^2=10$ штук, получим две системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases} 10e_1-3e_2-2e_3-e_4=20 \\ 20e_1+8e_2-3e_3-2e_4=100 \\ 30e_1+19e_2+8e_3-3e_4=180 \\ e_1+e_2+e_3+e_4=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10e_1-3e_2-2e_3-e_4=20 \\ 20e_1+8e_2-3e_3-2e_4=100 \\ 30e_1+19e_2+8e_3-3e_4=180 \\ e_1+e_2+e_3+e_4=10 \end{cases}$$

Решениями данных систем уравнений будут:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{305}{77} \\ e_2 = \dfrac{30}{7} \\ e_3 = 0 \\ e_4 = \dfrac{520}{77} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 = \dfrac{270}{77} \\ e_2 = \dfrac{30}{7} \\ e_3 = 0 \\ e_4 = \dfrac{170}{77} \end{cases}$$

Наконец, подставим полученные решения в исходную систему и получим таким образом совокупные транспортные издержки специального грузового транспорта на участке сети (9,42) в зависимости от партии, которые составят $298\frac{64}{77}$ для партии $Q^1 = 15$ и $285\frac{15}{77}$ для партии $Q^2 = 10$.

Учитывая, что акторы обязаны оплачивать 20%, то их издержки на преодоление участка сети (9,42) при использовании транспорта повышенной и транспорта пониженной вместимости будут равны соответственно: $59\frac{59}{77}$ и $57\frac{3}{77}$.

Далее рассмотрим участок сети (34,55), представленный на рисунке 4:

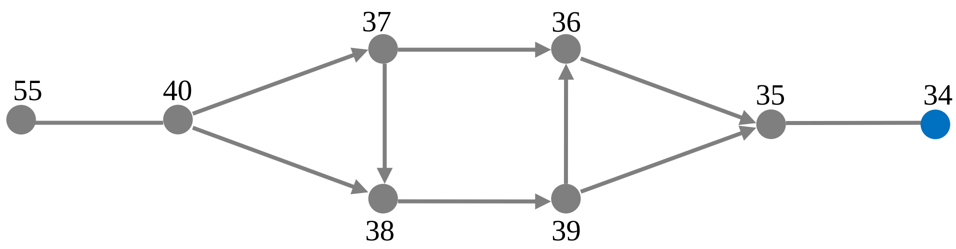

Рис.4

Специальный транспорт на данном участке также курсирует по 4 маршрутам, представленным в таблице 17:

Маршрут	Ребра, входящие в маршрут
№1	(37,40) → (36,37) → (35,36)
№2	(37,40) → (37,38) → (38,39) → (36,39) → (35,36)
№3	(40,38) → (38,39) → (36,39) → (35,36)
№4	(40,38) → (38,39) → (35,39)

Таблица 17

Транспортные издержки специального грузового транспорта на каждом ребре маршрута зависят от количества товара, перевозимого по данному ребру.

Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – количество товара, провозимое по маршруту с соответствующим индексом. Тогда издержки, затраченные на прохождение каждого маршрута можно записать следующим образом:

Для пути №1:

$$10(e_1 + e_2) + 10e_1 + 95 + 10(e_1 + e_2 + e_3)$$

Для пути №2:

$$10(e_1 + e_2) + e_2 + 15 + (e_2 + e_3 + e_4) + 75 + (e_2 + e_3) + 15 + 10(e_1 + e_2 + e_3)$$

Для пути №3:

$$(e_3 + e_4) + 110 + (e_2 + e_3 + e_4) + 75 + (e_2 + e_3) + 15 + 10(e_1 + e_2 + e_3)$$

Для пути №4:

$$(e_3 + e_4) + 110 + (e_2 + e_3 + e_4) + 75 + e_4 + 110$$

Упростив, получим, соответственно:

$$30e_1 + 20e_2 + 10e_3 + 95$$

$$20e_1 + 23e_2 + 12e_3 + e_4 + 105$$

$$10e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 2_4 + 200$$

$$e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 295$$

Найдем равновесие по Нэшу. Для этого необходимо, чтобы все полученные значения были равны. Приравняв с первым значением все остальные, получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 10e_1 - 3e_2 - 2e_3 - e_4 = 10 \\ 20e_1 + 8e_2 - 3e_3 - 2e_4 = 105 \\ 30e_1 + 19e_2 + 8e_3 - 3e_4 = 200 \end{cases}$$

Далее, учитывая, что размер партии при доставке товара от пунктов производства до складов на транспорте повышенной вместимости $Q^1 = 15$ штук, а размер партии при доставке товара от складов до торговых точек на транспорте малой вместимости $Q^2 = 10$ штук, получим две системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases} 10e_1 - 3e_2 - 2e_3 - e_4 = 10 \\ 20e_1 + 8e_2 - 3e_3 - 2e_4 = 105 \\ 30e_1 + 19e_2 + 8e_3 - 3e_4 = 200 \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10e_1 - 3e_2 - 2e_3 - e_4 = 10 \\ 20e_1 + 8e_2 - 3e_3 - 2e_4 = 105 \\ 30e_1 + 19e_2 + 8e_3 - 3e_4 = 200 \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 10 \end{cases}$$

Решениями данных систем уравнений будут:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{260}{77} \\ e_2 = \frac{85}{14} \\ e_3 = 0 \\ e_4 = \frac{855}{154} \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 = \frac{225}{77} \\ e_2 = \frac{85}{14} \\ e_3 = 0 \\ e_4 = \frac{155}{154} \end{cases}$$

Наконец, подставим полученные решения в исходную систему и получим таким образом совокупные транспортные издержки специального грузового транспорта на участке сети (34,55) в зависимости от партии, которые составят $317\frac{8}{11}$ для партии $Q^1 = 15$ и $306\frac{1}{11}$ для партии $Q^2 = 10$.

Учитывая, что акторы обязаны оплачивать 20%, то их издержки на преодоление участка сети (34,55) при использовании транспорта повышенной и транспорта пониженной вместимости будут равны соответственно: $63\frac{6}{11}$ и $61\frac{12}{55}$.

Теперь найдем пути с минимальными транспортными издержками для акторов от пунктов производства товара до складов. Так как при этом используется транспорт повышенной вместимости, то матрица D_1^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_a^1}(x, y)$. При этом узлы x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, расположенные на участке сети (9,42) и узлы x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, расположенные на участке сети (34,55) можно исключить из матрицы, так как перевозка груза на этих участках производится на специальном грузовом транспорте, а совокупные издержки на них вычислены выше. Применив к матрице D_1^0 алгоритм Флойда — Уоршелла, получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для актора при использовании транспорта повышенной вместимости.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от пунктов производства товара до складов:

	x_{11}	x_{16}	x_{65}
x_0	35	30	98
x_{69}	96	66	27

Таблица 18

Так как размер партии $Q^1 = 15$, то минимальные удельные транспортные издержки на пути от пунктов производства товара до складов:

	x_{11}	x_{16}	x_{65}
x_0	$2\frac{1}{3}$	2	$6\frac{8}{15}$
x_{69}	6,4	4,4	1,8

Таблица 19

Далее, найдем пути с минимальными транспортными издержками для акторов от складов до узлов возможного размещения торговых точек. В этом случае товар доставляется на транспорте малой вместимости, а матрица D_2^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_a^2}(x, y)$. При этом узлы x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, расположенные на участке сети (9,42) и узлы x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, расположенные на участке сети (34,55) вновь можно исключить из матрицы, так как перевозка груза на этих участках производится на специальном грузовом транспорте, а совокупные издержки на них вычислены выше. Вновь воспользуемся алгоритмом Флойда — Уоршелла и получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для актора при использовании транспорта малой вместимости.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от складов до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
x_{11}	24	23	32	37	59
x_{16}	27	38	4	39	37
x_{65}	64	34	45	13	31

Таблица 20

И так как размер партии $Q^2 = 10$, то минимальные удельные транспортные издержки на пути от складов до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
x_{11}	2,4	2,3	3,2	3,7	5,9
x_{16}	2,7	3,8	0,4	3,9	3,7
x_{65}	6,4	3,4	4,5	1,3	3,1

Таблица 21

Итого, суммарные удельные транспортные издержки актора при доставке единицы товара до узлов возможного размещения торговых точек в зависимости от выбора пункта производства и склада, составляют:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
$x_0 \to x_{11}$	$4\frac{11}{15}$	$4\frac{19}{30}$	$5\frac{8}{15}$	$6\frac{1}{30}$	$8\frac{7}{30}$
$x_0 \to x_{16}$	4,7	5,8	2,4	5,9	5,1
$x_0 \to x_{65}$	$12\frac{14}{15}$	$9\frac{14}{15}$	$11\frac{1}{30}$	$7\frac{5}{6}$	$9\frac{19}{30}$
$x_{69} \to x_{11}$	8,8	8,7	9,6	10,1	12,3
$x_{69} \to x_{16}$	7,1	8,2	4,8	8,3	8,1
$x_{69} \to x_{65}$	8,2	5,2	6,3	3,1	4,9

Таблица 22

С учетом стоимости единицы товара в пунктах производства: $l_1 = 3$ в пункте производства x_0 и $l_2 = 4{,}5$ в пункте производства x_{69}; суммарных удельных транспортных издержек; удельных складских издержек: $s_1 = 3$ на складе x_{11}, $s_2 = 2{,}5$ на складе x_{16} и $s_3 = 2$ на складе x_{65}; а также наценки актора 100%, получаем стоимость единицы товара во всех узлах возможного размещения торговых точек для покупателей в зависимости от выбора актором пункта производства и склада:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
$x_0 \rightarrow x_{11}$	$21\frac{7}{15}$	$21\frac{4}{15}$	$23\frac{1}{15}$	$24\frac{1}{15}$	$28\frac{7}{15}$
$x_0 \rightarrow x_{16}$	20,4	22,6	15,8	22,8	21,2
$x_0 \rightarrow x_{65}$	$35\frac{13}{15}$	$29\frac{13}{15}$	$32\frac{1}{15}$	$25\frac{2}{3}$	$29\frac{4}{15}$
$x_{69} \rightarrow x_{11}$	32,6	32,4	34,2	35,2	39,6
$x_{69} \rightarrow x_{16}$	28,2	30,4	23,6	30,6	30,2
$x_{69} \rightarrow x_{65}$	29,4	23,4	25,6	19,2	22,8

Таблица 23

Учитывая, что актор выбирает пункт производства товара и склад для его хранения таким образом, чтобы его совокупные издержки на закупку, хранение и доставку товара до торговой точки были минимальными, можем найти окончательную стоимость единицы товара во всех узлах возможного расположения торговых точек для покупателей:

x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
20,4	$21\frac{4}{15}$	15,8	19,2	21,2

Таблица 24

Теперь, учитывая что покупатели в узлах x_2, x_9, x_{25}, x_{34}, x_{43}, x_{54}, x_{66} желают приобретать соответственно по $v_1 = 10$, $v_2 = 7$, $v_3 = 8$, $v_4 = 12$, $v_5 = 7$, $v_6 = 10$, $v_7 = 8$ единиц товара, можем вычислить для каждого покупателя стоимость покупки необходимого ему количества товара в зависимости от выбора возможной торговой точки:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
x_2	204	$212\frac{2}{3}$	158	192	212
x_9	142,8	$148\frac{13}{15}$	110,6	134,4	148,4
x_{25}	163,2	$170\frac{2}{15}$	126,4	153,6	169,6
x_{34}	244,8	255,2	189,6	230,4	254,4
x_{43}	142,8	$148\frac{13}{15}$	110,6	134,4	148,4
x_{54}	204	$212\frac{2}{3}$	158	192	212
x_{66}	163,2	$170\frac{2}{15}$	126,4	153,6	169,6

Таблица 25

Далее, нам необходимо найти пути с минимальными издержками из узлов расположения всех покупателей во все узлы возможного размещения торговых точек. Матрица D_3^0 весов ребер графа состоит из транспортных издержек $\overline{C_b}(x,y)$. При этом узлы x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, расположенные на участке сети (9,42) и узлы x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, расположенные на участке сети (34,55) можно исключить из матрицы, так как эти участки сети закрыты для передвижения по ним покупателей. После применения к матрице D_3^0 алгоритма Флойда — Уоршелла получим матрицу путей с минимальными транспортными издержками между всеми парами узлов для покупателей.

Таким образом вес путей с минимальными издержками от узлов расположения покупателей до узлов возможного размещения торговых точек:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
x_2	21	50	16	52	45
x_9	11	33	19	43	40
x_{25}	35	19	43	19	53
x_{34}	35	33	8	35	28
x_{43}	39	27	21	22	12
x_{54}	63	60	33	55	21
x_{66}	67	41	49	24	40

Таблица 26

Суммируя для каждого покупателя транспортные издержки до узлов возможного размещения торговых точек и стоимость покупки необходимого ему количества товара в зависимости от выбора возможной торговой точки, найдем совокупные издержки покупателя в зависимости от выбора возможной торговой точки:

	x_7	x_{26}	x_{31}	x_{45}	x_{52}
x_2	225	$262\frac{2}{3}$	174	244	257
x_9	153,8	$181\frac{13}{15}$	129,6	177,4	188,4
x_{25}	198,2	$189\frac{2}{15}$	169,4	172,6	222,6
x_{34}	279,8	288,2	197,6	265,4	282,4
x_{43}	181,8	$175\frac{13}{15}$	131,6	156,4	160,4
x_{54}	267	$272\frac{2}{3}$	191	247	233
x_{66}	230,2	$211\frac{2}{15}$	175,4	177,6	209,6

Таблица 27

Теперь, учитывая, что каждый покупатель выбирает торговую точку, где его совокупные издержки будут минимальными, можем построить матрицу доходов торговых точек в зависимости от их расположения. Всего возможно 10 ситуаций:

	(7,26, 31)	(7,26, 45)	(7,26, 52)	(7,31, 45)	(7,31, 52)	(7,45, 52)	(26,31, 45)	(26,31, 52)	(26,45, 52)	(31,45, 52)
1	0	346,8	591,6	0	0	346,8	0	0	0	979,6
2	0	0	$170\frac{2}{15}$	979,6	979,6	672	979,6	979,6	998,4	0
3	979,6	864	530	0	0	212	0	0	212	0

Таблица 28

Данная матрица является матрицей выигрышей Г, в строках которой стоят торговые точки, а в столбцах - возможные ситуации в игре:

$$\Gamma = (\alpha_{m,q});\ \ m = 1,2,3;\ q = 1, \dots ,10$$

Идеальный вектор М будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\limits_q \alpha_{1,q} \\ \max\limits_q \alpha_{2,q} \\ \max\limits_q \alpha_{3,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 979{,}6 \\ 998{,}4 \\ 979{,}6 \end{pmatrix}$$

В свою очередь матрица невязок $\Gamma_M = (\beta_{m,q}) = (M - \alpha_{m,q})$ будет иметь вид:

	(7,26, 31)	(7,26, 45)	(7,26, 52)	(7,31, 45)	(7,31, 52)	(7,45, 52)	(26,31, 45)	(26,31, 52)	(26,45, 52)	(31,45, 52)
1	979,6	632,8	388	979,6	979,6	632,8	979,6	979,6	979,6	0
2	998,4	998,4	$828\frac{4}{15}$	18,8	18,8	326,4	18,8	18,8	0	998,4
3	0	115,6	449,6	979,6	979,6	767,6	979,6	979,6	767,6	979,6

Таблица 29

Теперь упорядочим в матрице невязок в каждой ситуации значения по возрастанию таким образом, чтобы в первой строке были наименьшие невязки, а в последней - наибольшие. Получим:

	(7,26, 31)	(7,26, 45)	(7,26, 52)	(7,31, 45)	(7,31, 52)	(7,45, 52)	(26,31, 45)	(26,31, 52)	(26,45, 52)	(31,45, 52)
1	0	115,6	332,4	18,8	18,8	326,4	18,8	18,8	0	0
2	979,6	632,8	388	979,6	979,6	632,8	979,6	979,6	767,6	979,6
3	998,4	998,4	449,6	979,6	979,6	767,6	979,6	979,6	979,6	998,4

Таблица 30

Наконец, в последней строке, содержащей максимальные невязки $max_m(\beta_{m,q})$, выберем минимальное значение:

$$\min_q \max_m(\beta_{m,q}) = 449{,}6$$

Полученному значению соответствует ситуация (7,26,52), которая и является компромиссным решением. Таким образом, торговые точки согласно принципу компромиссного решения необходимо разместить в узлах x_7, x_{26} и x_{52}. При этом доход акторов составит: (591,6; $170\frac{2}{15}$; 530).

Выводы

По результатам работы можно сделать следующий вывод. Поставленная задача полностью решена и проиллюстрирована на двух численных примерах. В первом примере рассмотрен случай размещения двух торговых точек в транспортной сети из 30 узлов и 50 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, двух складов и четырех покупателей. Во втором примере рассмотрен случай размещения трёх торговых точек в транспортной сети из 70 узлов и 120 ребер при заданном расположении двух пунктов производства товара, трёх складов и семи покупателей. Во всех примерах найдено оптимальное расположение торговых точек в узлах транспортной сети в соответствии с принципом компромиссного решения.

Заключение

Таким образом, в результате рассмотрения модели выбора и сопровождения геополитическими акторами инвестиционного проекта, заключающегося в построении торговой сети, была решена задача размещения конечного числа торговых точек в узлах транспортной сети, при заданном расположении пунктов производства товара, покупателей и складов в соответствии с принципом компромиссного решения с помощью представленного в главе 1 алгоритма, проиллюстрированного в главе 2 на двух численных примерах.

Примером использования данной выпускной квалификационной работы на практике может служить инвестиционный проект нескольких геополитических акторов по выходу на нефтепродуктовый рынок нового для них географического региона с желанием разместить свои нефтехранилища в различно удаленных друг от друга узлах имеющейся в регионе транспортной сети для последующей перепродажи нефтепродуктов. Такая ситуация вынуждает акторов договариваться между собой и таким образом, руководствуясь принципом компромиссного решения, размещать нефтехранилища в узлах транспортной сети.

Литература

[1] Колокольцов В.Н., Малафеев О.А. Теория игр для всех (введение в математический анализ многоагентных систем конкуренции и кооперации). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007. 309 с.

[2] Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. 1006 с.

[3] Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 408 с.

[4] Новожилова Л.М. Графы, сети, трасы. СПб.: Издательский Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2007. 108 с.

[5] Hotelling H. Stability in competition // The Economic Journal, 1929. Vol. 153, № 39. P. 41-57.

[6] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002. 553 с.

Приложение

Текст программы, используемой в работе, реализующей алгоритм Флойда — Уоршелла:

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <cstdlib>
const int inf=1E9;
using namespace std;
int main()
{
	int n,i,j,k,r[10],d[100][100];
	char buff[10];
	scanf("%d",&n);
	ifstream fin("C:\\myfile.txt");
	for (i=0;i<n;++i)
		for (j=0;j<n;++j)
		{
			fin >> buff;
			r[0]=buff[0]-0x30;
			r[1]=buff[1]-0x30;
			d[i][j]=r[0]*10+r[1];
			if (i==j)
				d[i][j]=min(d[i][j],0);
			if (d[i][j]== ∞)
				d[i][j]=inf;
		}
	for (k=0;k<n;++k)
			for (i=0;i<n;++i)
				for (j=0;j<n;++j)
					if (d[i][k]<inf && d[k][j]<inf)
						d[i][j]=min(d[i][j],d[i][k]+d[k][j]);
	for (i=0;i<n;++i)
		if (d[i][i]<0)
		{
			printf("INCORRECT");
			return 0;
		}
	for (i=0;i<n;++i,printf("\n"))
		for (j=0;j<n;++j)
			if (d[i][j]==inf)
				printf("NO ");
			else
				printf("%d ",d[i][j]);
	fin.close();
	system ("pause");
	return 0;
}
```